

Krystyna Burczyk

Modele matematyczne. Plasterki



Brzesko 2000

© Copyright by Krystyna Burczyk 2000.
All rights reserved

Zdjęcia: Krystyna Burczyk
Rysunki i skład: Wojciech Burczyk

W pracy wykorzystano modele wykonane przez uczniów LO w Bochni w latach 1997-1999

Wszelkie prawa zastrzeżone.

Utwór w całości ani we fragmentach nie może być powielany ani rozpowszechniany za pomocą urządzeń elektronicznych (w tym publicznie udostępniany w Internecie), mechanicznych, kopiujących nagrywających i innych bez pisemnej zgody posiadacza praw autorskich, z wyjątkiem poniższych przypadków.

Dozwolone jest kopiowanie fragmentów utworu przez nauczyciela będącego właścicielem egzemplarza niniejszego utworu do wykorzystania do celów dydaktycznych, przy zachowaniu zasady „jeden nauczyciel – jedna książka”. W przypadku, gdy właścicielem książki jest szkoła, dozwolone jest wykorzystywanie kopii utworu przez tylu nauczycieli, ile egzemplarzy zakupiła szkoła.

Kontakt w sprawie praw autorskich oraz uzyskania dodatkowych egzemplarzy:

Krystyna Burczyk
burczyk@mail.zetosa.com.pl
ul. Starowiejska 21/6
32-800 Brzesko

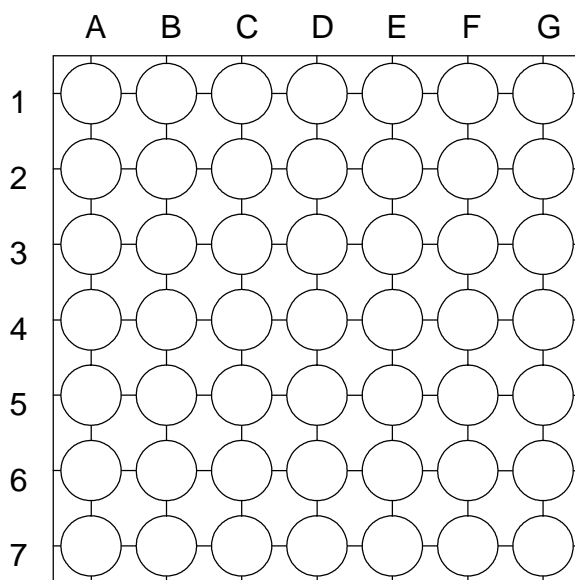
Spis treści

Aby wykonać model plasterkowy ...	3
Przykładowe szablony kółeczkowe.	9
Trochę teorii - funkcja rzeczywista dwu zmiennych.	10
Projekt wykresu plasterkowego utworzonego przy pomocy funkcji dwu zmiennych.	10
Jak wykonać plasterkową półkulę ?	12
Inne propozycje: sześcianik w pułapce.	13
Jak zorganizować pracę uczniów na lekcji, aby wykonać z nimi modele plasterkowe?	13
Bibliografia	13

Aby wykonać model plasterkowy ...

... należy przygotować: papier w kratkę, ołówek lub długopis, nożyczki, linijkę, kolorowy karton.

Zaczynamy od ustalenia wielkości modelu: np., że podstawą będzie kwadrat $7\text{ cm} \times 7\text{ cm}$, a wysokość modelu nie przekroczy 6 cm . Na papierze w kratkę wykonujemy szablon podstawy: rysujemy kwadrat $7\text{ cm} \times 7\text{ cm}$ i wypełniamy go pustymi kółeczkami o średnicy 8 mm tak, aby środki tych kółeczek znajdowały się w punktach kratowych¹ w odległości 1 cm od siebie, przy czym środki kółeczek przy brzegu kwadratu są oddalone od tego brzegu o $0,5\text{ cm}$. Rzędy kółeczek numerujemy kolejno 1, 2, ..., 7, a kolumny A, B, ..., G.



Kółeczka wypełniamy liczbami. Liczby te oznaczają wysokość (w cm), jaką będą miały plasterki w poszczególnych miejscach.

Warto² ustalić zbiór, z którego będziemy czerpać te liczby, np. "wpisujemy tylko liczby ze zbioru $\{1; 2; \dots; 7\}$ ", wpisujemy tylko liczby z $\{1; 1,5; 2; 2,5; \dots; 6,5; 7\}$ ", "podajemy wysokość z dokładnością do 1 mm , ale nie mniejszą niż 1 cm i nie większą niż 7 cm ". Nie wpisujemy liczb ujemnych.

Szablon wypełniamy wstawiając liczby losowo lub próbując wyobrazić sobie pewien kształt. Możemy uwzględniać symetrię lub dobierać liczby chaotycznie.

Gotowy szablon podstawy posłuży nam jako wzorec do odczytu wymiarów poszczególnych plasterków.

¹ Punkty kratowe, to punkty powstające w miejscach przecięcia linii poziomych i linii pionowych kratek.

² Wprowadzenie takich ograniczeń pozwoli uniknąć kłopotów w czasie składania modelu.

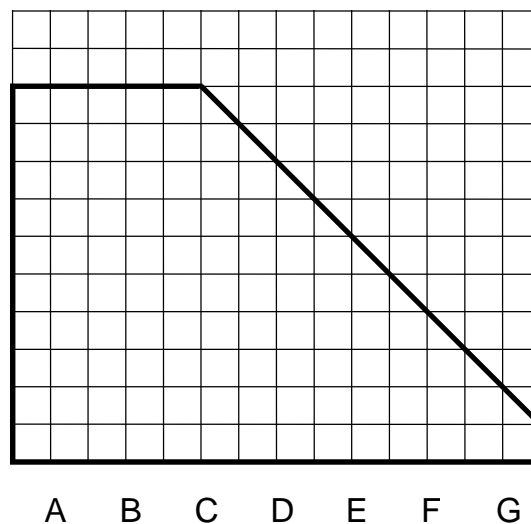
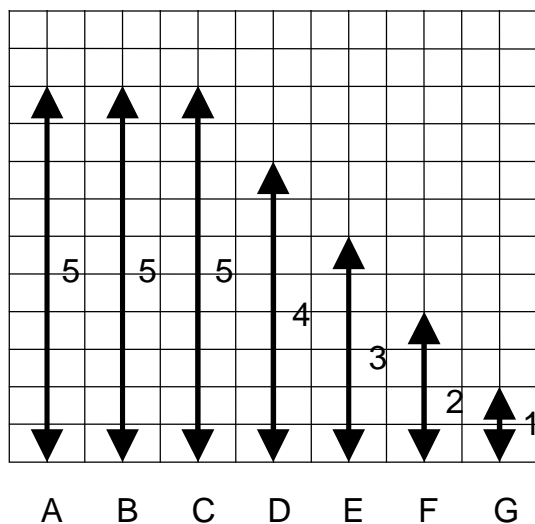
Oto przykładowo wypełniony szablon:

	A	B	C	D	E	F	G
1	5	5	5	4	3	2	1
2	2	3	4	5	4	3	2
3	1	2	3	4	5	4	3
4	2	3	4	5	3	2	2
5	3	4	5	4	4	3	3
6	2	3	4	5	4	4	4
7	1	2	3	4	5	5	5

Otrzymana tablica liczb składa się z kolumn i wierszy. Odczytując z niej dane wykonamy dwie serie plasterków: jedna seria będzie odpowiadała wierszom, druga kolumnom.

Szablony plasterków wykonujemy na papierze w kratkę³. Rysujemy prostokąt o szerokości 7 cm (wszystkie plasterki będą miały taką samą szerokość). Odczytujemy liczby umieszczone w pierwszym wierszu: 5, 5, 5, 4, 3, 2, 1. Po kolei wyznaczamy punkty, których odległości od dolnej podstawy prostokąta odpowiadają wymienionym liczbom. Pierwszy punkt umieszczamy w odległości 0,5 cm od lewego boku prostokąta. Otrzymane punkty łączymy łamaną (możemy również spróbować połączyć je linią gładką), którą przedłużamy do boków prostokąta.

Oto przykład wykonania szablonu plasterka odpowiadającego wierszowi nr 1:



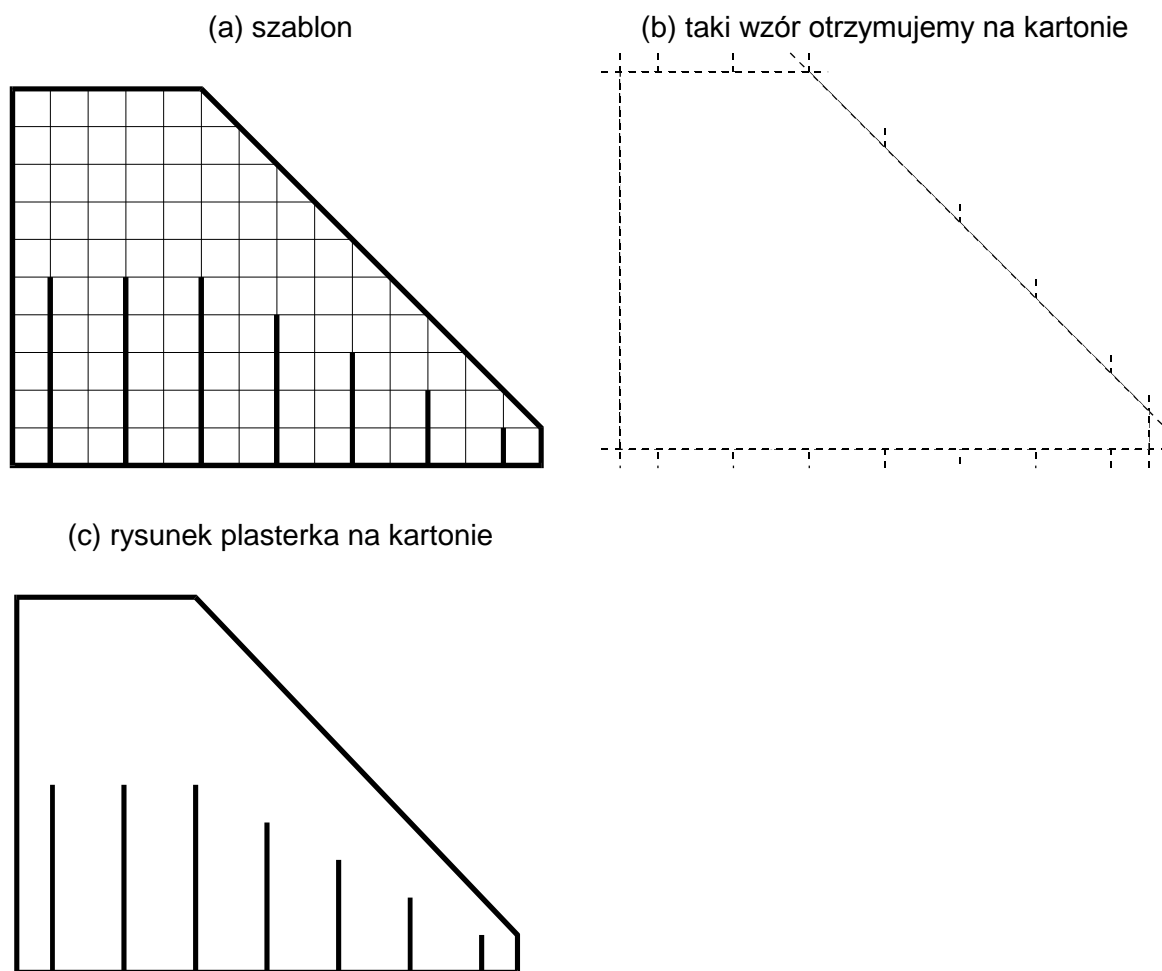
W ten sam sposób wykonujemy szablony plasterków dla pozostałych sześciu wierszy i dla siedmiu kolumn. Musimy pamiętać o tym, aby każdy wykonany szablon podpisać (numer odpowiedniego wiersza lub kolumny). Ułatwi nam to potem składanie modelu.

³ Jeżeli uda nam się skopiować lub wydrukować wzór kratki na kartonie, to szablony wykonane na takim papierze możemy już uznać za plasterki. Pozwala to pominąć etap kopiowania.

Na szablonach rysujemy linie nacięć pamiętając o tym, że plasterki wierszowe będziemy naciąć od dołu, a kolumnowe od góry. Nacięcia będziemy wykonywać wzdłuż linii odpowiadających wierszom (kolumnom) tzn. pierwsze od brzegu nacięcie wykonamy w odległości 0.5 cm od brzegu, a następne co 1 cm. Długość nacięcia powinna być równa połowie wysokości plasterka w miejscu cięcia.

Tak przygotowane szablony musimy jeszcze przekopiować na karton. W tym celu wycinamy szablony⁴ (nie wykonujemy nacięć!). Kładziemy je na kartonie i obrysowujemy zaznaczając wierzchołki łamanej i brzegów szablonu. Musimy pamiętać o zaznaczeniu linii nacięć.

Oto przykład wykonania plasterka przez obrysowanie wyciętego szablonu:



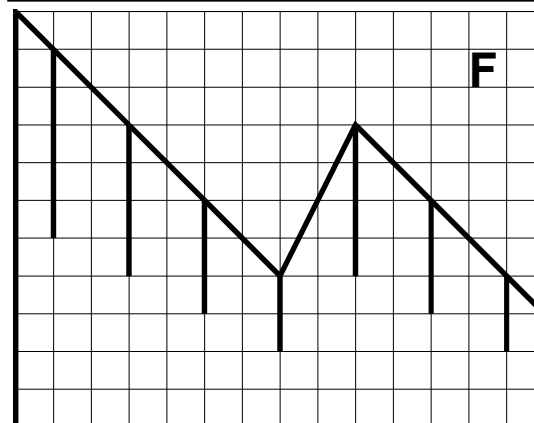
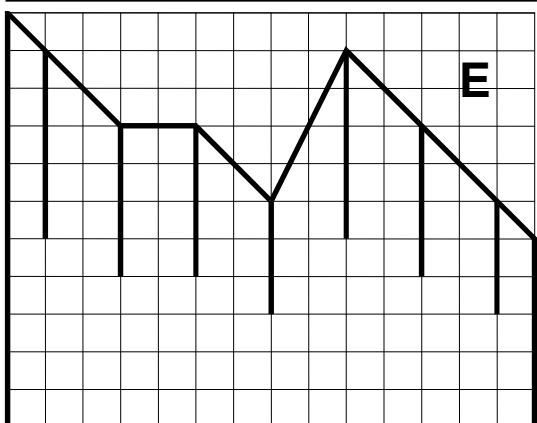
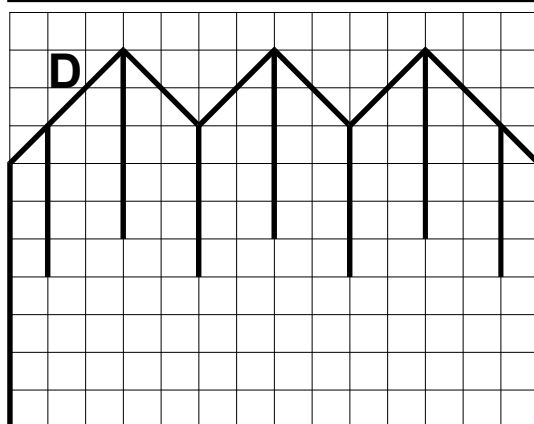
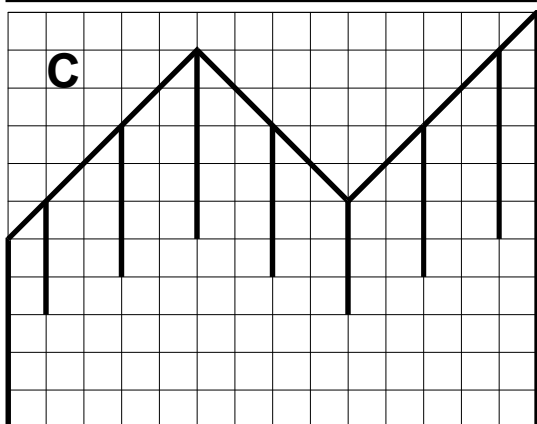
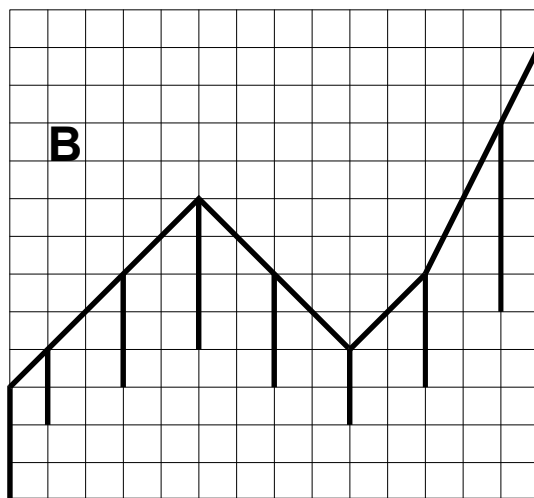
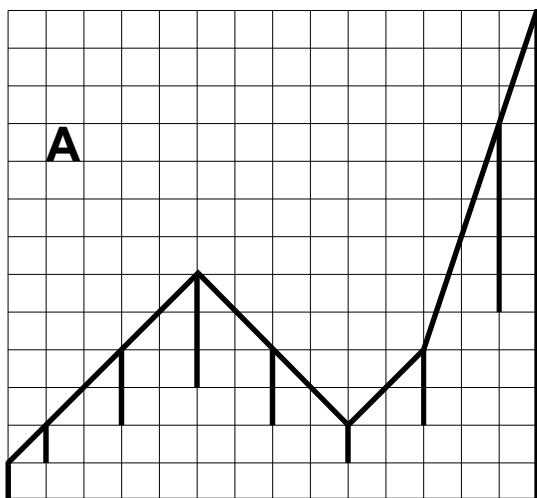
Wycinamy plasterki z kartonu.

Wykonujemy nacięcia wzdłuż zaznaczonych linii. Nacięcie musi być wykonane w postaci wąskiej szczeliny⁵ dłuższej o 1-2 mm od zaplanowanej linii. Umożliwi to łatwe złożenie gotowego modelu.

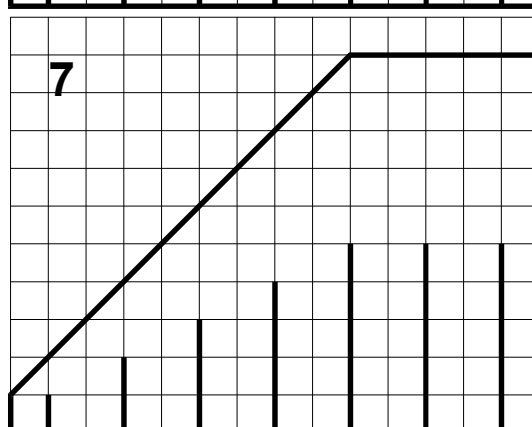
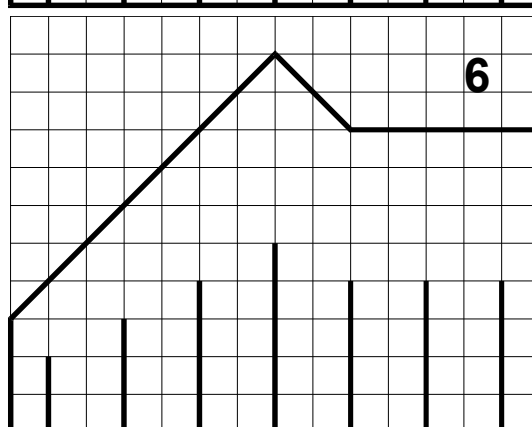
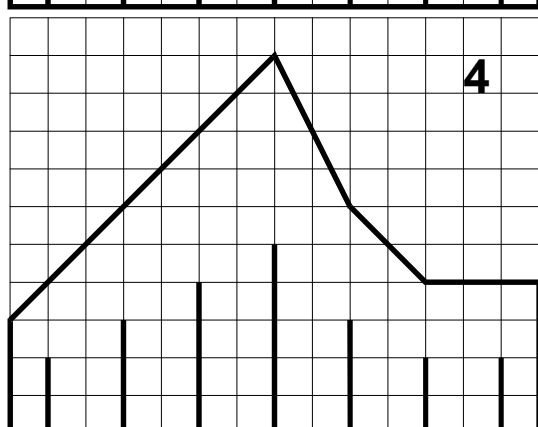
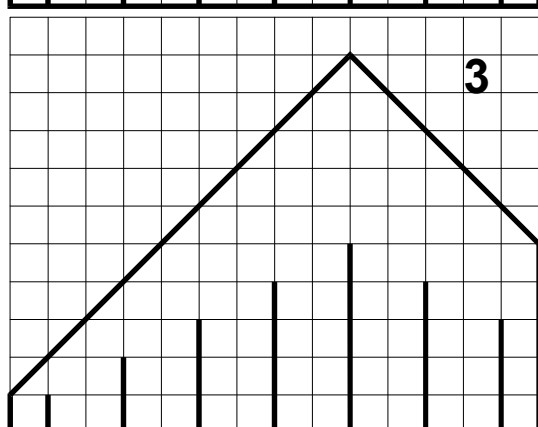
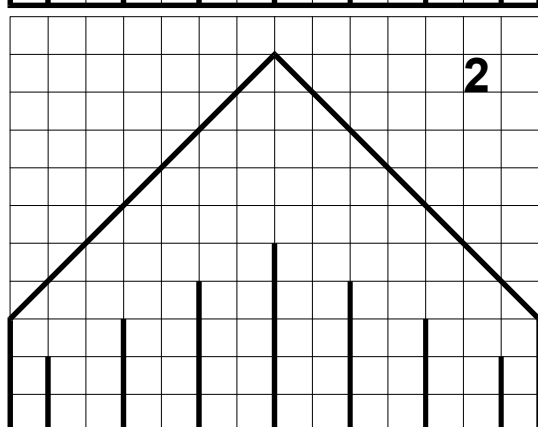
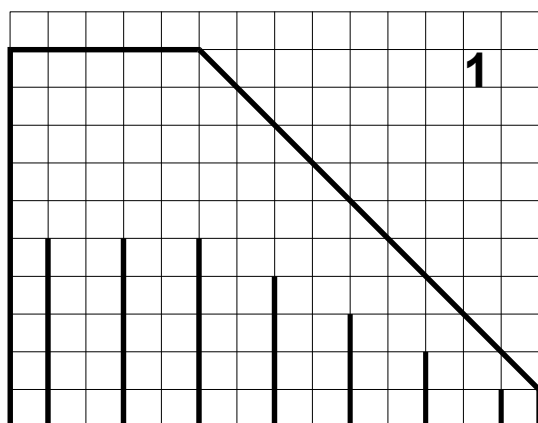
Na następnych dwu stronach zamieszczony został pełny zestaw szablonów plasterków wykonanych dla podanej wcześniej tablicy:

⁴ Kopiowanie można również wykonać bez wycinania szablonów, wystarczy przy pomocy cyrkla przekopiować punkty szablonów na karton umieszczonym kartką z szablonami.

⁵ Szerokość szczeliny zależy od grubości kartonu – za wąska spowoduje, że model będzie się wyginał, za szeroka spowoduje, że model będzie się rozpadał.

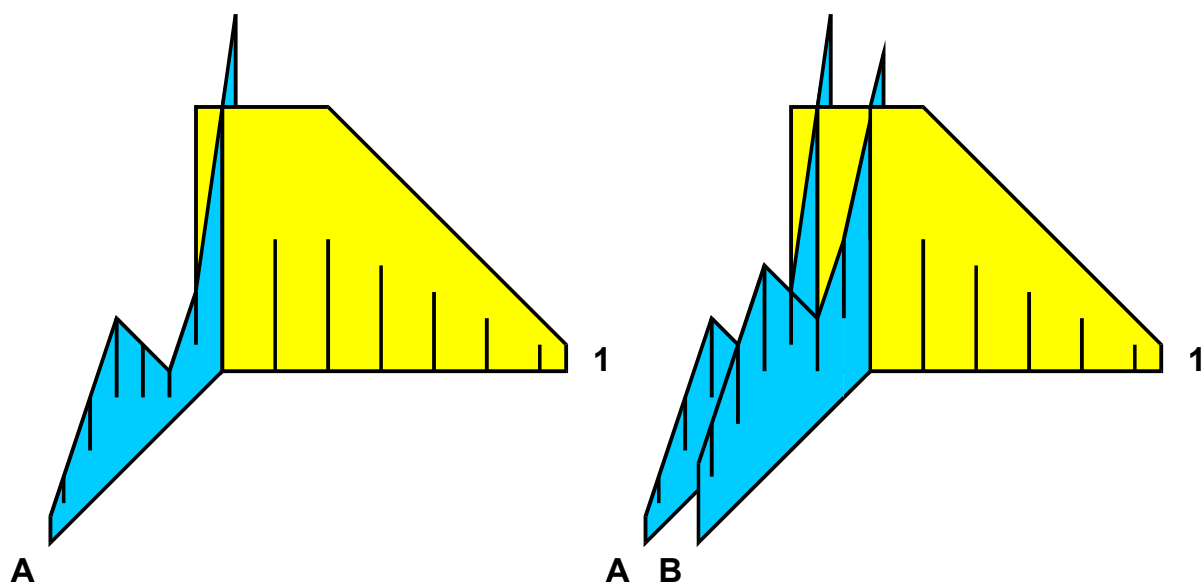


Plasterki kolumnowe



Plasterki wierszowe

Składanie modelu zaczynamy od dwóch plasterków leżących jak najbliżej środka podstawy⁶. Następnie dokładamy po kolei wszystkie plasterki nacięte od góry pamiętając o zachowaniu właściwej kolejności (takiej jak na szablonie podstawy). Na końcu dokładamy po kolei plasterki nacinane od dołu.



Do każdego modelu można wykonać podstawkę w kształcie prostokątnego pudełeczka o wysokości 1 cm.

Gotowe modele możemy przechowywać w wersji złożonej. Są wtedy płaskie i nie ulegają odkształceniom czy uszkodzeniom.

Efekt jest wart naszej pracy !



⁶ Można również zacząć od brzegu. Najpierw połączyć plasterki 1 i A, dołożyć kolejno plasterki 2, 3, ..., 7, po czym plasterki B, C, ..., G. Najlepiej samemu wypróbować różne możliwości i wybrać tę najbardziej pasującą.

Przykładowe szablony kółeczkowe.

Siodło

	A	B	C	D	E	F	G
1	4	5	3,5	2,5	3,5	5	4
2	5	3	2,5	2	2,5	3	5
3	7	4	2	1,5	2	4,5	7
4	10	6	3	1	3	6	10
5	7	4	2	1,5	2	4	7
6	5	3	2,5	2	2,5	3	5
7	4	5	3,5	2,5	3,5	5	4

Krater

	A	B	C	D	E	F	G
1	7	6	5	4	3	2	1
2	6	5	4,5	4	3,5	3	2
3	5	4,5	4	4	4	3,5	3
4	4	4	4	4	4	4	4
5	3	3,5	4	4	4	4,5	5
6	2	3	3,5	4	4,5	5	6
7	1	2	3	4	5	6	7

Dolina

	A	B	C	D	E	F	G
1	3	2,2	1	1	1	2,2	3
2	4	2,5	1,1	1	1,1	2,5	4
3	6	3	2,2	1	2,2	3	6
4	9	4	2,5	1,5	2,5	4	9
5	6	6	3	2	3	6	6
6	3	3,5	4	2,5	4,5	3,5	3
7	1	2	3,5	3	3,5	2	1

Góra

	A	B	C	D	E	F	G
1	2	2	2	2	2	2	2
2	2	4	4	4	4	4	2
3	2	4	6	6	6	4	2
4	2	4	6	7	6	4	2
5	2	4	6	6	6	4	2
6	2	4	4	4	4	4	2
7	2	2	2	2	2	2	2

	A	B	C	D	E
1	2,5	1,1	1	1,1	2,5
2	3	2,2	1	2,2	3
3	4	2,5	1,5	2,5	4
4	6	3	2	3	6
5	3,5	4	2,5	4,5	3,5

	A	B	C	D	E
1	5	4	3	2	1
2	4	4	3	2	1
3	3	3	3	2	1
4	2	2	2	2	1
5	1	1	1	1	1

Trochę teorii - funkcja rzeczywista dwu zmiennych.

Funkcją rzeczywistą dwu zmiennych nazywamy funkcję:

$$f : \mathbb{R}^2 \ni (x, y) \mapsto f(x, y) \in \mathbb{R}$$

Na przykład

1. $f(x, y) = 2x + y \in \mathbb{R}$

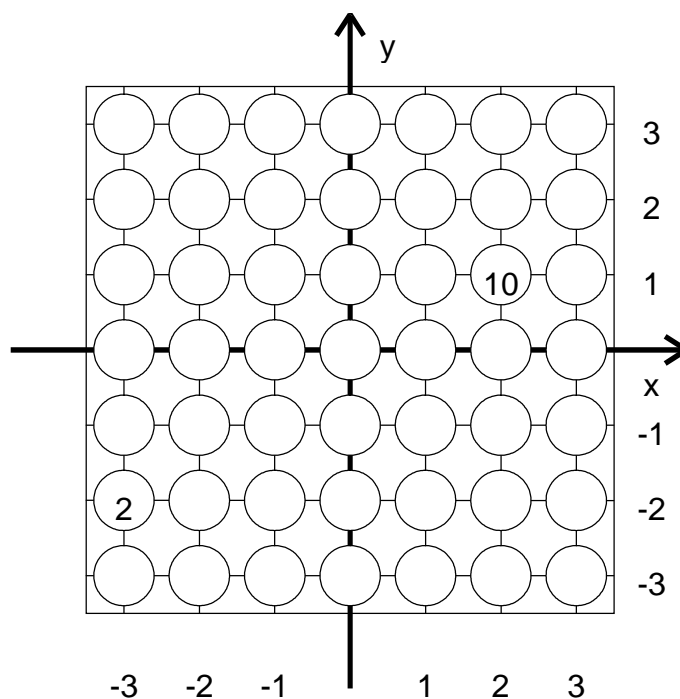
2. $f(x, y) = \sin x + y \in \mathbb{R}$

Wykresem takiej funkcji jest pewna powierzchnia w \mathbb{R}^3 . W przestrzennym (trójwymiarowym) układzie współrzędnych argumentami funkcji są punkty na płaszczyźnie XY a wartości odmierzamy na osi Z.

Gdy $f(3,2) = 1$, otrzymujemy punkt A o współrzędnych (3,2,1)

Projekt wykresu plasterkowego utworzonego przy pomocy funkcji dwu zmiennych.

Do wypełniania szablonu kółeczkowego możemy wykorzystać znane funkcje liczbowe. W tym celu wystarczy na płaszczyźnie wprowadzić układ współrzędnych, na przykład tak:



I już możemy wykorzystać wzór do wpisywania liczb do kółeczek. Położenie każdego z kółeczek opisuje para współrzędnych (x,y) . Wstawiając odczytane współrzędne do wzoru funkcji możemy wyliczyć wartość, którą mamy w pisać w kółeczko. Np. możemy użyć funkcji:

$$f(x, y) = x + y + 7$$

$$f(2, 1) = 2 + 1 + 7 = 10$$

$$f(-3, -2) = -3 + (-2) + 7 = 2$$

Dobierając położenie osi i wzór funkcji musimy pamiętać o tym, że w kółeczkach możemy umieszczać tylko liczby dodatnie. Czasem możemy być zmuszeni do wprowadzenia

skalującego współczynnika, np. $f(x, y) = 0.5(x + y + 7)$, gdy wartości wyliczane przez nas są zbyt małe lub zbyt duże.

Przykłady funkcji, które możemy wykorzystać do uzyskania wykresów plasterkowych:

$$f(x, y) = |x + y|$$

$$f(x, y) = |x| + |y|$$

$$f(x, y) = \frac{xy}{2} + 6$$

$$f(x, y) = 5 - \frac{x^3 y^2}{50}$$

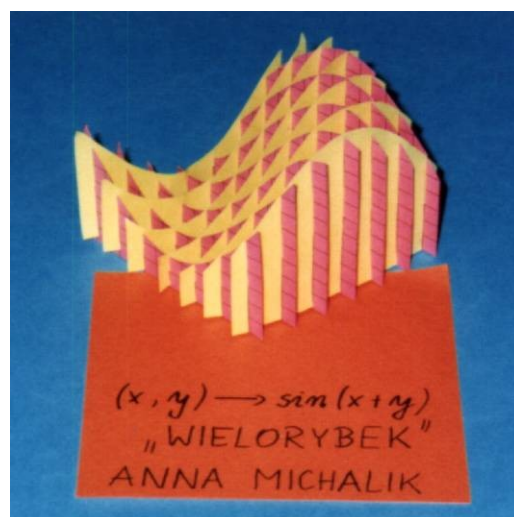
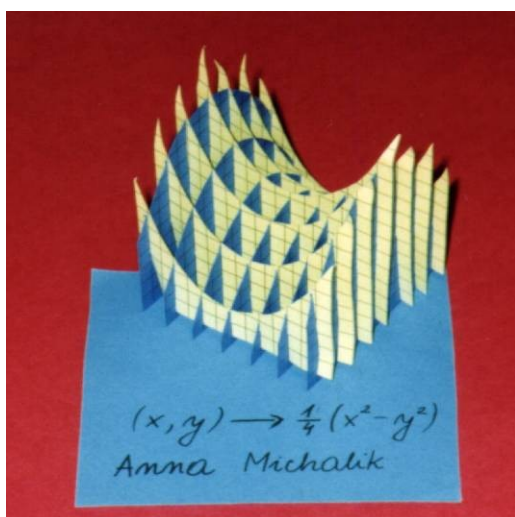
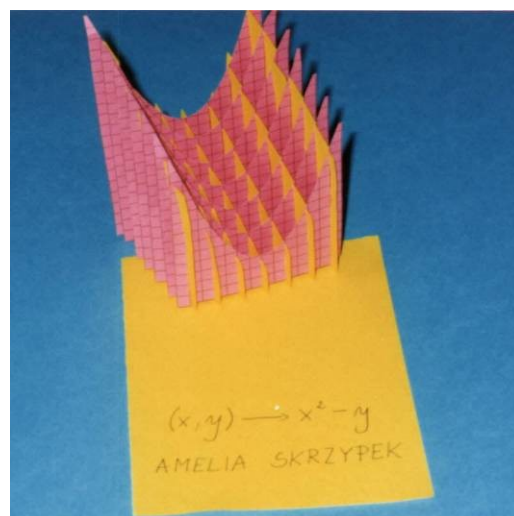
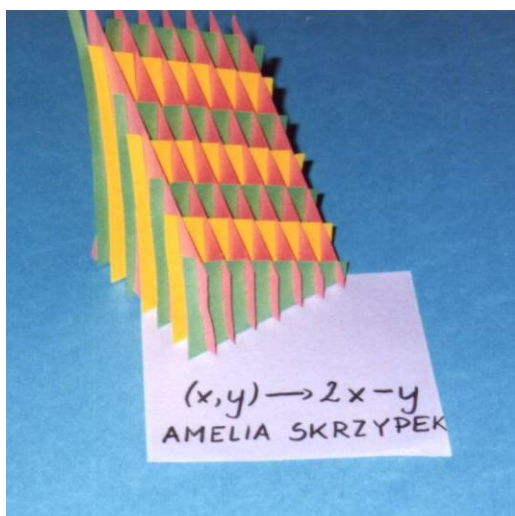
$$f(x, y) = 2 \sin(x + y) + 4$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{4} + 4$$

$$f(x, y) = \frac{x^y}{5} + 1$$

$$f(x, y) = \arcsin x + y + 5; \quad x, y \in \langle -1, 1 \rangle$$

$$f(x, y) = \frac{1}{2} y \sin x + 2; \quad x, y \in \left\{ -\frac{3}{2}\pi, -\pi, -\frac{\pi}{2}, 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3}{2}\pi \right\}$$

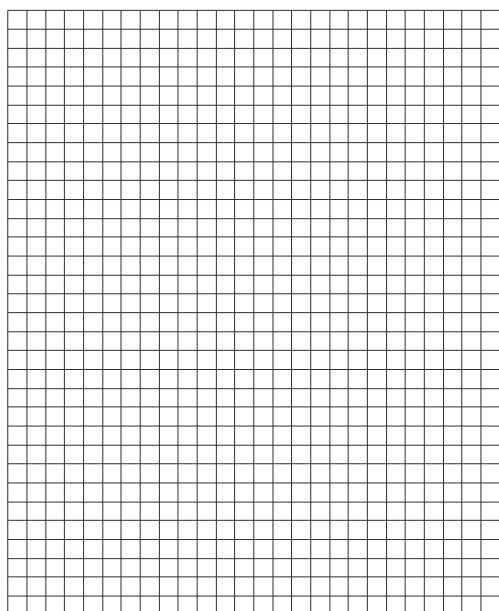


Jak wykonać plasterkową półkulę ?

Podstawą wykresu plasterkowego może być dowolny kwadrat, prostokąt (najlepiej, gdy długości boków są całkowitymi wielokrotnościami ustalonej jednostki) a nawet inną figurą płaską, np. koło.

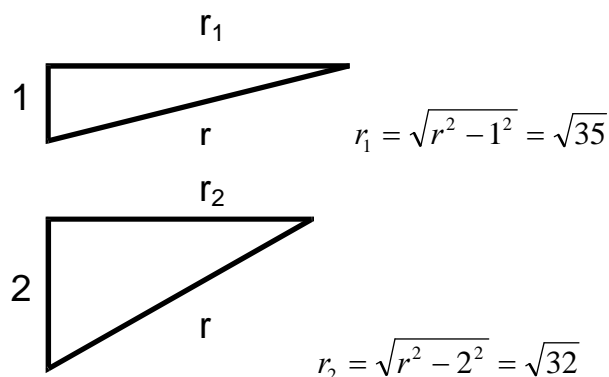
Aby wykonać plasterkowy model półkuli możemy oczywiście wykorzystać funkcje dwu zmiennych. Ale możemy również wykonać ten model bez sięgania po rachunki. Wystarczą nam do tego konstrukcje geometryczne wykonywane przy pomocy linijki i cyrkla oraz zwykła kartka w kratkę.

Na papierze w kratkę rysujemy koło o promieniu równym promieniowi wykonywanego modelu półkuli. Całe koło pokrywamy liniami pionowymi i poziomymi w odstępach 1 cm (wykorzystując do tego kratkę). Linie te wyznaczają promienie półkuli, które będą plasterkami modelu.



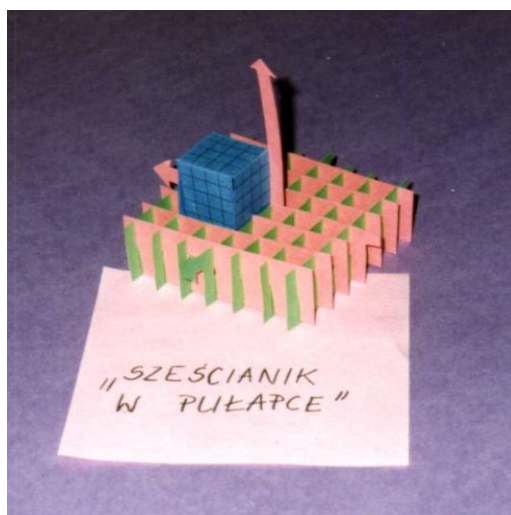
$$\begin{aligned}r_5 &= \sqrt{11} \\r_4 &= \sqrt{20} \\r_3 &= \sqrt{27} \\r_2 &= \sqrt{32} \\r_1 &= \sqrt{35} \\r &= 6\end{aligned}$$

Promienie te odmierzymy przy pomocy cyrkla i na kartonie rysujemy odpowiednie koła (jedno koło to dwa plasterki; możemy też rysować półkoła – wtedy oszczędniej wykorzystamy papier). Promienie tych półkuli możemy również obliczyć korzystając z twierdzenia Pitagorasa, np.:



Dla każdego promienia wykonujemy 4 półkoła (2 koła). Wykonane półkoła nacinamy według tych samych zasad co inne plasterki – dwa nacinamy od góry, a dwa od dołu.

Inne propozycje: sześciianik w pułapce.



Jak zorganizować pracę uczniów na lekcji, aby wykonać z nimi modele plasterkowe?

Modele plasterkowe możemy wykonać w czasie lekcji matematyki. Opisana poniżej organizacja pracy pozwala na wykonanie modelu w ciągu dwu jednostek lekcyjnych (90 min).

Uczniowie pracują w grupach 2-osobowych. Każda grupa otrzymuje:

- dwa puste szablony 5x5
- dwie kartki A4 z cienkiego kartonu z nadrukowanymi kratkami, każda kartka powinna być w innym kolorze

Każdy uczeń **musi** mieć ołówek, **nożyczki**, linijkę.

Praca przebiega w 4 etapach:

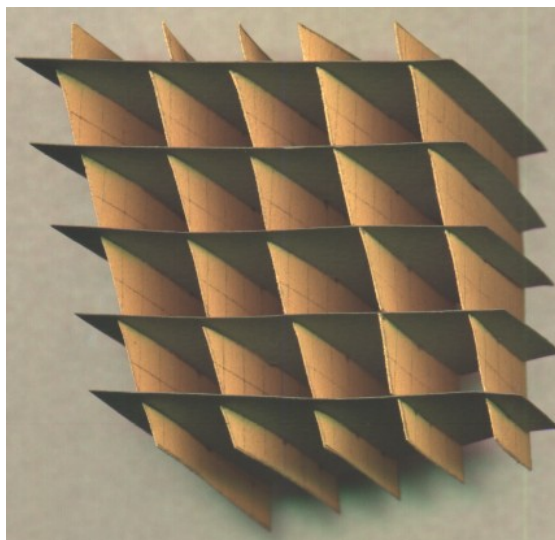
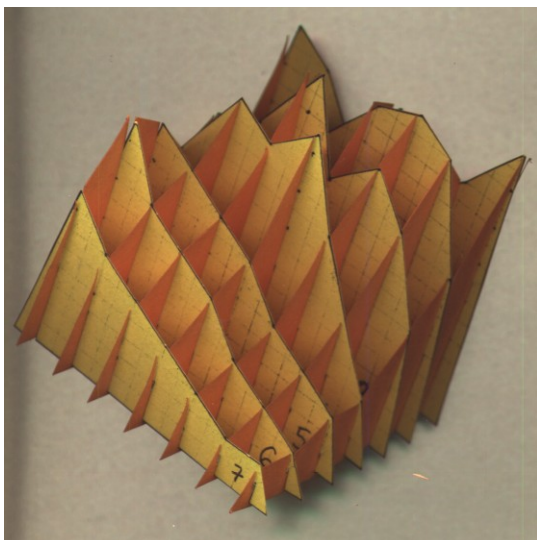
1. Planowanie. Nauczyciel wyjaśnia zasady wypełniania szablonów i odczytywania z nich wymiarów plasterków. Na tablicy (planszy) prezentuje duży rysunek szablonu i jednego plasterka.
2. Rysowanie. Plasterki rysowane są na kolorowych kartkach A4 z nadrukowaną kratką. Każdy z uczniów otrzymuje jedną kartkę. Jeden z uczniów w grupie rysuje plasterki wierszowe, drugi kolumnowe. Nauczyciel chodzi po klasie i służy pomocą.
3. Wycinanie. Po sprawdzeniu przez nauczyciela poprawności rysunku, uczniowie wycinają narysowane plasterki i wykonują nacięcia.
4. Składanie. Uczniowie łączą wycięte plasterki w gotowy model. Niektóre grupy być może będą musiały wykonać ten etap w domu, gdy będzie konieczne dokonanie poprawek.

Bibliografia

H. M. Cundy, A. P. Rollett, Modele Matematyczne.

H. Steinhaus, Kalejdoskop Matematyczny, WSiP 1989.

J. Sharp, Sliceforms. Mathematical models from paper sections, Tarquin Publications, 1995-2000.



Modele matematyczne. Plasterki.

Modele plasterkowe wykresów funkcji dwóch zmiennych zostały po raz pierwszy zaprezentowane w Polsce publicznie na VI krajowej konferencji Stowarzyszenia Nauczycieli Matematyki (SNM) w lutym 1997 w Kielcach. W Pracowni Całodobowej Grupy Roboczej SNM "Warsztat Otwarty" Piotr Pawlikowski pokazał wykonane przez siebie modele: kulę, paraboloidę, hiperboloidę paraboliczną i inne. Każdy z uczestników konferencji, o ile tylko wykazał się dużą dozą cierpliwości, mógł pod okiem instruktorów własnoręcznie wykonać prosty model plasterkowy.

Przedstawiony w książeczce sposób tworzenia modeli plasterkowych został przeze mnie opracowany na podstawie moich doświadczeń w pracy z uczniami. Sposób ten był prezentowany na konferencjach SNM (w Grudziądzu w 1998 i 2000 r.) i spotkał się z dużym zainteresowaniem.

Krystyna Burczyk